

3. Mocninové funkce s celým exponentem

DEF. Definici mocnin s přirozeným exponentem ($m \in \mathbb{N}$) rozšíříme o $m=0$ a $m \in \mathbb{Z}^-$ (celý kladný exp.)

1. $m \in \mathbb{Z}^+ (= \mathbb{N})$: $\forall a \in \mathbb{R}$: $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m$ [mocnina s přiroz. exp.]

2. $m=0$: $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$: $a^0 = 1$ [0^0 undef.]

3. $m \in \mathbb{Z}^-$: $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$: $a^m = \frac{1}{a^{-m}}$ [převrácení na mocninu s přiroz. exponentem]
 $[m \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow -m \in \mathbb{Z}^+ (= \mathbb{N})]$

Příklady

① $0^0 = 0 \cdot 0 = 0$ ($m \in \mathbb{N}$) $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \left[\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{1}{\frac{2^3}{3^3}} = \frac{3^3}{2^3}\right]$

$2^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \left(-\frac{4}{3}\right)^0 = 1$

$(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

0^0 undef.

[ZOPAKUJTE SI MOCNINY S PŘIROZENÝM A CELÝM EXPONENTEM - 1. ROČ. VYS. STUDIA]

DEF. MOCNINNÁ FUNKCE S CELÝM EXPONENTEM

je definována

1. pro $m \in \mathbb{Z}^+ (= \mathbb{N})$: $f: y = x^m$ $x \in \mathbb{R}$ [$\mathbb{D} = \mathbb{R}$] [1 přiroz. exp.]

2. pro $m=0$: $f: y = x^0 [=1]$ $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ [$\mathbb{D} = \mathbb{R} - \{0\}$] [0^0 undef.]

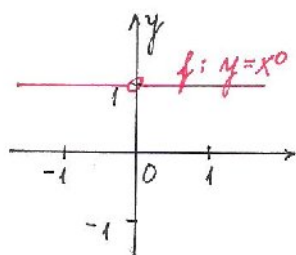
3. pro $m \in \mathbb{Z}^-$ (celý kladný exp.): $f: y = x^m$ $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ [$\mathbb{D} = \mathbb{R} - \{0\}$]

Příklady

① náčinné grafy funkcí

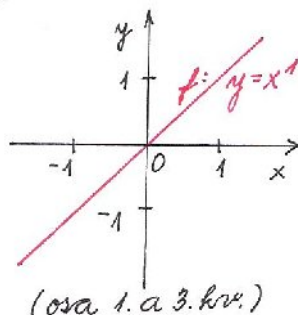
a) $f: y = x^0$

$f: y = x^0$ $\mathbb{D} = \mathbb{R} - \{0\}$
 $y = 1$
 KONSTANTNÍ FUNKCE



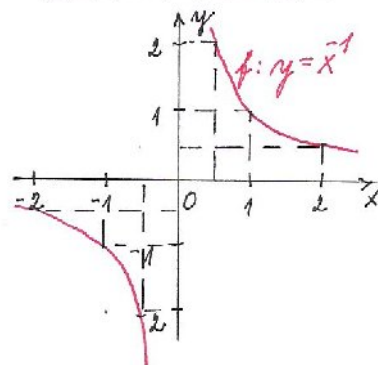
b) $f: y = x^1$

$f: y = x$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
 PŘÍMA
 ÚHEŘNOST



c) $f: y = x^{-1}$

$f: y = \frac{1}{x}$ $\mathbb{D} = \mathbb{R} - \{0\}$
 NEPŘÍMA ÚHEŘNOST



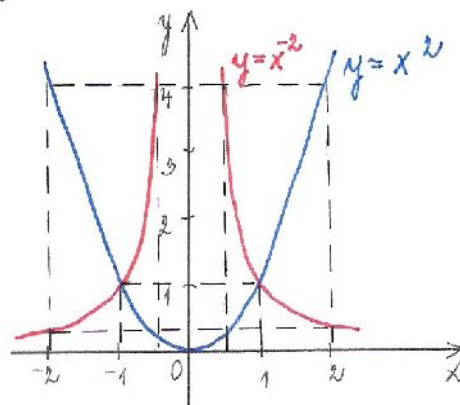
c) $f: y = x^2$
 $\mathcal{D} = \mathbb{R}$
 KVADR. FCE

	1	2	-1	-2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$y = x^2$	1	4	1	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$y = \frac{1}{x^2}$	1	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	4	4

VLASTNOSTI $f: y = x^{-2}$

$\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{0\}$ $\mathcal{H} = (0, +\infty) = \mathbb{R}^+$
 rostoucí pro $x \in (-\infty, 0)$
 klesající pro $x \in (0, +\infty)$
 omezená při sdotah
 sudá
 nemá extrém

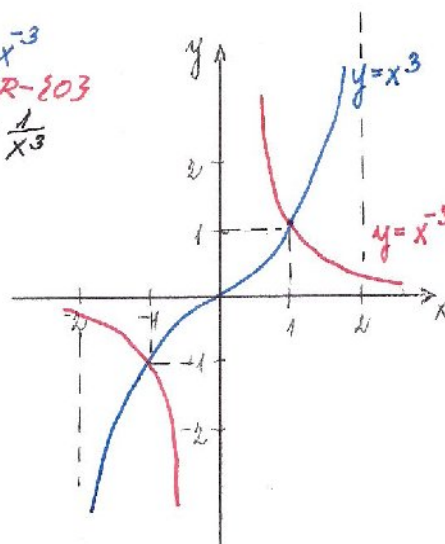
g: $y = x^{-2}$
 $y = \frac{1}{x^2}$ $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{0\}$



d) $f: y = x^3$
 $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

	1	2	-1	-2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$y = x^3$	1	8	-1	-8	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$
$y = \frac{1}{x^3}$	1	$\frac{1}{8}$	-1	$-\frac{1}{8}$	8	-8

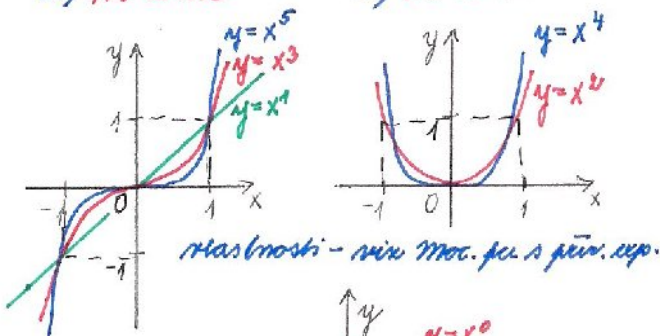
g: $y = x^{-3}$
 $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{0\}$
 $y = \frac{1}{x^3}$



GRAFY MOCNINNÝCH FUNKCÍ S CELÝM EXPONENTEM - Náhled na exponenciál

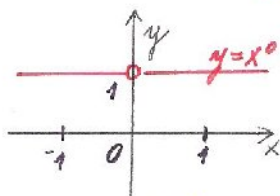
1. $m \in \mathbb{Z}^+$ (N - má mocn. fce a pív. exp.)

a) m LICHÉ' b) m SUDE'



Vlastnosti - má moc. fce a pív. exp.

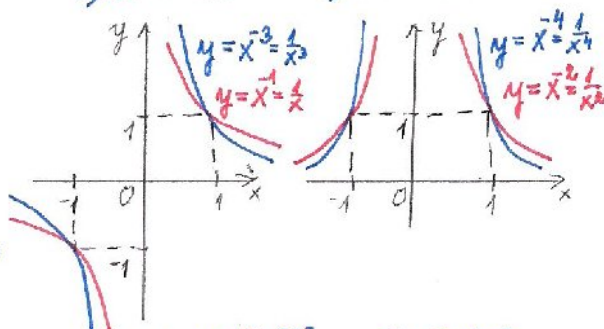
3. $m = 0$



$\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{0\}$ $\mathcal{H} = \{1\}$ sudá
 omezená sdotah i shora, není prostá
 max. 1 není pro $\forall x \in \mathcal{D}$

2. $m \in \mathbb{Z}^-$

a) m LICHÉ' b) m SUDE'

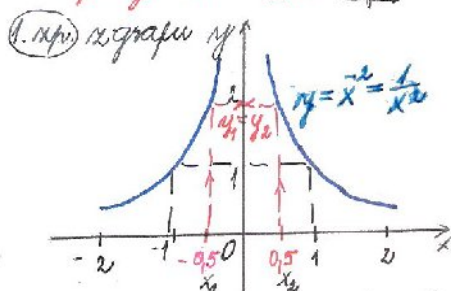


$\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{0\}$ $\mathcal{H} = \mathbb{R} - \{0\}$
 klesající v $\mathcal{D}$
 není omezená
 lichá
 nemá extrém
 prostá

$\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{0\}$
 $\mathcal{H} = (0, +\infty)$
 rostoucí v $(-\infty, 0)$
 klesající v $(0, +\infty)$
 sudá
 omezená sdotah
 nemá extrém
 není prostá

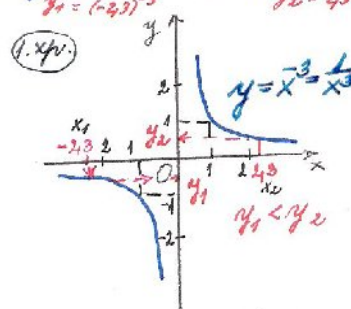
② Porovnání (myšl. grafy a vlastnosti funkcí)

a) $(-0,5)^{-2} \square 0,5^{-2}$
 $y_1 = (-0,5)^{-2}$ $y_2 = 0,5^{-2}$
 $f: y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$



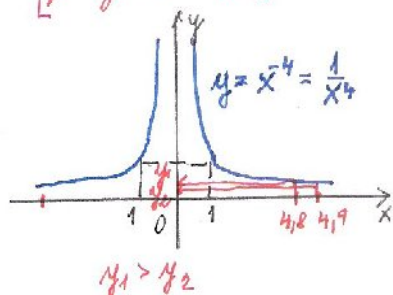
(2. xpr.) $f: y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ je sudá, y'
 je klesá. $f(-x) = f(x)$
 $(-0,5)^{-2} = 0,5^{-2}$

b) $(-2,3)^{-3} \square 2,3^{-3}$
 $y_1 = (-2,3)^{-3}$ $y_2 = 2,3^{-3}$ $f: y = x^{-3}$

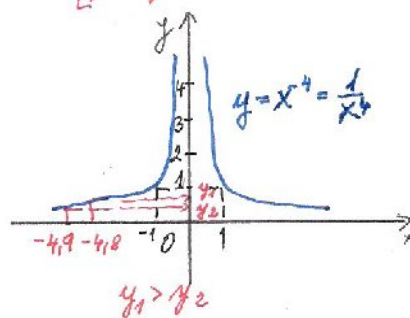


(2. xpr.) $f: y = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ klesající v $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
 je-li $x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 < y_2$

c) $4,8^{-4} \square 4,9^{-4}$
 $y_1 = 4,8^{-4}$ $y_2 = 4,9^{-4}$
 $[f: y = x^{-4} = \frac{1}{x^4}]$

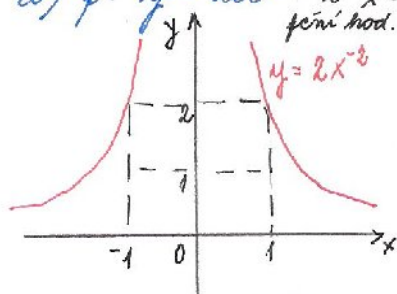


d) $(-4,8)^{-4} \square (-4,9)^{-4}$
 $y_1 = (-4,8)^{-4}$ $y_2 = (-4,9)^{-4}$
 $[f: y = x^{-4} = \frac{1}{x^4}]$

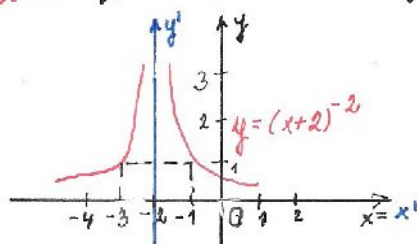


③ načtení grafy

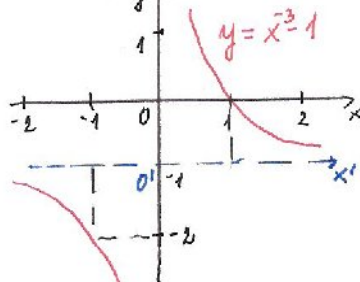
a) $f: y = 2x^{-3} = 2 \cdot \frac{1}{x^3}$
 první hod. 2 = větší míra
 $y' = \frac{1}{x^2}$



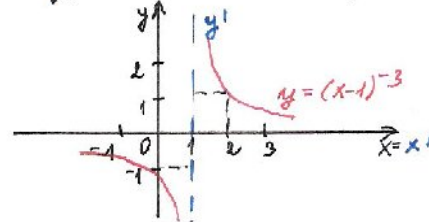
c) $f: y = (x+2)^{-2}$
 $y_0 = 0$ $x_0 = -2$ $0'[-2,0]$ $y' = \frac{1}{x^2}$



b) $y = x^{-3} - 1$
 $y_0 = 0$ $x_0 = 1$ $0'[0,1]$ $f: y = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$



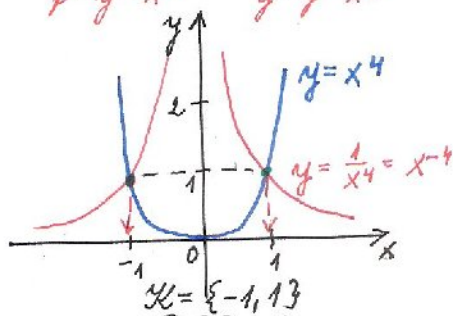
d) $y = (x-1)^{-3}$
 $y_0 = 0$ $x_0 = 1$ $0'[1,0]$ $y' = \frac{1}{x^2}$



④ Řeš v $\mathbb{R}$ s využití grafů funkcí!

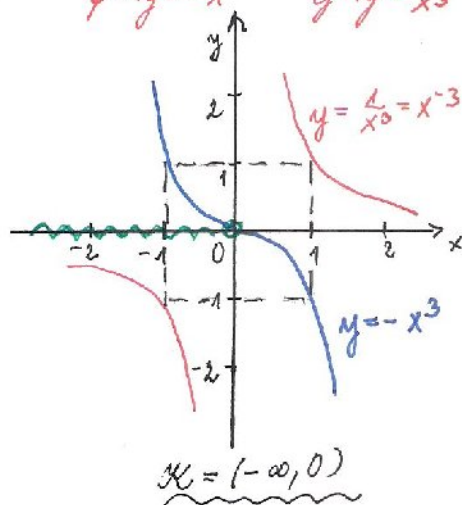
a) $(-x)^4 = x^{-4}$

$f: y = x^4$ $g: y = \frac{1}{x^4}$



c) $(-x)^3 \geq x^{-3}$

$f: y = -x^3$ $g: y = \frac{1}{x^3}$



b) $x^3 \leq x^{-2}$

$f: y = x^3$ $g: y = x^{-2}$

